Zhytomyr Ivan Franko State University Journal. Pedagogical Sciences. Vol. 1 (116)

Вісник Житомирського державного університету імені Івана Франка. Педагогічні науки. Вип. 1 (116)

ISSN (Print): 2663-6387
ISSN (Online): 2664-0155

UDC 378.14:371.214.46:[004.78:51]
DOI 10.35433/pedagogy.1(116).2024.13

THE ROLE OF INTEGRATIVE CONTENT TASKS IN THE IMPLEMENTATION OF THE CONTINUITY PRINCIPLE IN TEACHING MATHEMATICS USING ICT

R. Ya. Rizhniak*, Yu. V. Botuzova, V. V. Nichyshyna*****

The purpose of the research is the determination of the role of tasks of integrative content in the implementation of the continuity principle in teaching mathematics. During the research, we used the following methods: analysis of school mathematics curricula and educational programs for training future mathematics teachers, search, and analysis of relevant problems with further formation of problems with integrative content based on them; generalization of own and advanced pedagogical experience regarding the application of computer mathematics systems in the educational process of secondary and higher schools. As a result of the research, the following conclusions were made: the use of problems of integrative content provides an opportunity to form integrated images of mathematical material, as well as to consolidate mathematical objects, the use (by subjects of training) of scientific methods of cognition – observation, analogy, analysis, synthesis, comparison. This approach was implemented from the point of view of the integration of teaching methods, such as the method of addition, the technology of enlargement of didactic units, and the method of contrast. And also, from the point of view of teaching aids, the use of graphic illustrations, information and communication technologies, schemes, and algorithms of analytical statements. This practice ensures the formation of generalized mathematical skills and, as a result, the formation of integrative mathematical abilities and beliefs based on them, which will enable the implementation of the continuity principle in the study of mathematics between different branches of education. It is possible only with an in-depth study of specific mathematical problems and under the condition of using a heuristic approach to learning with the using ICT tools.

Keywords: *integrative approach, continuity of teaching mathematics, mathematical problem, information technologies, enlargement of didactic units.*

* Doctor of Sciences (History), Professor
(Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytskyi)
rizhniak@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1977-9048
** Doctor of Sciences (Pedagogy), Docent
(Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytskyi)
vassalatii@gmail.com
ORCID: 0000-0002-1313-0010
*** Candidate of Pedagogical Sciences (PhD in Pedagogy), Docent
(Volodymyr Vynnychenko Central Ukrainian State University, Kropyvnytskyi)
vika.nichishina@ukr.net
ORCID: 0000-0003-3771-1589

РОЛЬ ЗАДАЧ ІНТЕГРАТИВНОГО ЗМІСТУ В РЕАЛІЗАЦІЇ ПРИНЦИПУ НАСТУПНОСТІ НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ З ВИКОРИСТАННЯМ ІКТ

Р. Я. Ріжняк, Ю. В. Ботузова, В. В. Нічишина

Мета дослідження – визначення ролі завдань інтегративного змісту в реалізації принципу наступності у навчанні математики. Під час дослідження використовувалися такі методи: аналіз шкільних навчальних планів з математики та освітніх програм підготовки майбутніх учителів математики, пошук і аналіз актуальних задач з подальшим формуванням на їх основі задач інтегративного змісту; узагальнення власного та передового педагогічного досвіду щодо застосування комп'ютерних математичних систем у навчальному процесі загальноосвітньої та вищої школи. У результаті дослідження зроблено такі висновки, що використання задач інтегративного змісту дає можливість: формувати цілісні образи математичного матеріалу; закріплювати математичні об'єкти; використовувати суб'єктами навчання наукові методи пізнання – спостереження, аналогію, аналіз, синтез, порівняння. Цей підхід реалізовано з точки зору інтеграції методів навчання – методу доповнення, технології укрупнення дидактичних одиниць, методу контрасту. А також з точки зору засобів навчання – використання графічних ілюстрацій, інформаційно-комунікаційних технологій, схем, алгоритмів аналітичних висловлювань. Така практика забезпечує формування узагальнених математичних умінь і, як наслідок, формування на їх основі інтегративних математичних умінь і переконань, що дасть змогу реалізувати принцип наступності у вивченні математики між різними галузями освіти. Це можливо лише за умови поглибленого вивчення конкретних математичних задач та за умови використання евристичного підходу до навчання із застосуванням засобів ІКТ.

Ключові слова: *інтегративний підхід, наступність навчання математики, математична задача, інформаційні технології, укрупнення дидактичних підрозділів.*

Introduction of the issue. The main component of the modern stage of reforming the education system in Ukraine is the formation of mathematics teaching content. At the same time, it is important to focus on the process of forming schoolchildren mathematical competence. The effectiveness of this process directly depends on the acquisition of systematic, integral knowledge and continuity in the process of teaching mathematics. However, not always both in secondary school and in higher education institutions, the acquired knowledge has the property of integrity and systematicity. This leads to fragmented knowledge and makes it impossible to reflect the mathematics teaching content comprehensively. An effective means of obtaining a productive and flexible system of knowledge can be integration in teaching mathematics. Moreover, integration in the context of ensuring continuity in the process of teaching mathematics should be interpreted both as a process and as a result of teaching. In particular, it is possible to ensure continuity during teaching mathematics when solving complex and integrated problems. It is the tasks of integrative content that make it

Постановка проблеми. Основною складовою сучасного етапу реформування системи освіти України є побудова змісту навчання математики. При цьому важливою є спрямованість на процес формування в учнівської молоді математичної компетентності. Результативність цього процесу безпосередньо залежить від отримання системних, цілісних знань та наступності у процесі навчання математики. Проте не завжди як у загальноосвітній школі, так і у закладах вищої освіти отримані знання мають властивість цілісності та системності. Це призводить до фрагментарності знань та спричинює неможливість всеохоплюючого відображення змісту навчання математики. Дієвим засобом отримання продуктивної та гнучкої системи знань може бути інтеграція у навчанні математики. Причому інтеграцію у контексті забезпечення наступності у процесі навчання математики слід трактувати і як процес, і як результат навчання. Зокрема, забезпечити наступність під час навчання математики можливо під час розв'язування комплексних та possible to apply research, heuristic methods of teaching mathematics, to use previously learned theoretical material comprehensively, to combine analytical and graphic methods of solving tasks, in particular, with the help of ICT. Separately, it must be said that ensuring the continuity of teaching mathematics is facilitated not only by solving problems of an integrative content, but also by using the technique of composing problems with an integrative content.

Current state of the issue. Research by scientists, teachers, and psychologists is devoted to the issue of ensuring continuity and implementing an integrative approach in the educational process.

In the educational process, continuity is considered as a principle of education and upbringing. Outstanding scientist S. Goncharenko [11] gives the following interpretation of the concept of "continuity": "Continuity in education is the consistency and systematicity in the introduction of educational material, the connection and coherence of the degrees and stages of the educational process... Achieving continuity in school practice is ensured by methodically and psychologically justified preparation of programs, textbooks, following the sequence of transition from simple to more complex in learning and organization of independent work of students and, in general, the entire system of methodical means".

"Ensuring the continuity of the content and coordination of educational activities at various levels of education, which function as a continuation of the previous ones and mean the preparation of citizens for a possible transition to next levels" is defined by The National Doctrine of Education Development (2004) as a fundamental thesis in the context of ensuring thorough and systematic knowledge of education seekers.

The research of scientists G. Gordiychuk [12] and M. Didovik [13] are devoted to pedagogical conditions for ensuring the continuity of natural and mathematical disciplines study in various educational institutions. Y. Botuzova [2] analyzes the factors that ensure the continuity of

інтегрованих задач. Саме задачі інтегративного змісту дають можливість застосовувати дослідницькі, евристичні методи навчання математики, комплексно використовувати раніше засвоєний теоретичний матеріал, поєднувати аналітичні та графічні методи розв'язування завдань, зокрема, і за допомогою ІКТ. Окремо слід сказати також про те, що забезпеченню наступності навчання математики сприяє не тільки розв'язування задач інтегративного змісту, а і застосування прийому складання задач інтегративного змісту.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанню забезпечення наступності та реалізації інтегративного підходу у навчальному процесі присвячені дослідження науковців, вчителів та психологів.

В освітньому процесі наступність розглядається як принцип навчання та виховання. Видатний науковець Гончаренко С.У. [11] дає таке трактування поняття "наступність": "Наступність у навчанні – послідовність і системність у розміщенні навчального матеріалу, зв'язок і узгодженість ступенів і етапів навчально-виховного процесу. Досягнення наступності в шкільній практиці забезпечується методично і психологічно обґрунтованою побудовою програм, підручників, дотриманням послідовності руху від простого до складнішого в навчанні та організації самостійної роботи учнів і взагалі всією системою методичних засобів".

Національною доктриною розвитку освіти (2004) "забезпечення наступності змісту та координації навчально-виховної діяльності на різних щаблях освіти, що функціонують як продовження попередніх і передбачають підготовку громадян для можливого переходу на наступні щаблі" визначено основоположною тезою в контексті забезпечення ґрунтовних та системних знань здобувачів освіти.

Педагогічним умовам забезпечення наступності вивчення природничо-математичних дисциплін у різних освітніх закладах присвячені дослідження науковців Гордійчук Г.Б. [12] та mathematics teaching during the transition from secondary school to higher education. Y. Botuzova, V. Nichyshina, R. Rizhnyak [10] consider the sequence of teaching methods for solving mathematical problems in schools and higher educational establishments in the context of an integrative approach. The All-Ukrainian Research and Practice Conference was devoted to the implementation of the continuity principle in education, the result of which was a collection of materials (Continuity in Mathematics Education, [15]). In particular, the methodological requirements for the implementation of continuity in the mathematics teaching at the basic and specialized levels of secondary education are formulated in the publication of M. Burda. Among other ideas, we note the following: a) implementation of the continuity principle in teaching geometry in general and specialized secondary schools (O. Vashulenko); b) ensuring continuity during the study of functions through the use of practically oriented tasks (S. Ivanova, O. Olefir, I. Pavlovska); c) implementation of the principle of continuity in teaching algebra to elementary school students using designing technologies (S. Movchan); d) analysis of the application peculiarities of composing problems for the acquisition of mathematical competence technique (M. Bykova, A. Gromluk, S. Ivanova); e) research of analogy methods in the implementation of continuity in the mathematical disciplines teaching on the example of specialty 014.04 Secondary education (Mathematics) (I. Lovyanova, D. Bobylev); f) the use of designing technologies for training future mathematics teachers to implement the continuity principle in education (O. Matyash, Y. Prostakova, O. Svetnoi).

A number of publications were devoted to the problems of using an integrative approach in teaching mathematics. Practical recommendations for improving intra-subject integration in mathematics lessons are formulated in the publication (V. Gogovska & R. Malcheski [3]). P. Treacy, J. O'Donoghue [9] propose an author's model of cross-curricular integration of

Дідовика М.В. [13]. Ботузова Ю.В. [2] аналізує чинники забезпечення неперервності навчання математики при переході з середньої школи до вищої. Ботузова Ю.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. [10] розглядають наступність методів навчання розв'язування математичних задач у школі та закладі вищої освіти у контексті інтегративного підходу. Реалізації принципу наступності у навчанні була присвячена Всеукраїнська науково-практична конференція, результатом якої став збірник матеріалів (Наступність у навчанні математики, [15]). Зокрема, методичні вимоги до реалізації наступності у навчанні математики на базовому та профільному рівнях середньої освіти сформульовані у публікації Бурди М.І. Серед інших ідей відзначимо такі: а) реалізація принципу наступності у навчанні геометрії у базовій та профільній середній школі (Вашуленко О.П.); б) забезпечення наступності під час вивчення функцій через використання практично зорієнтованих завдань (Іванова С.В., Олефір О.І., Павловська І.Л.); в) реалізація принципу наступності у навчанні алгебри учнів основної школи з використанням проектних технологій (Мовчан С.М.); г) аналіз особливостей застосування прийому складання задач для набуття математичної компетентності (Бикова М.Л., Громлюк А.С., Іванова С.В.); д) дослідження прийомів аналогії при реалізації наступності у навчанні математичних дисциплін на прикладі спеціальності 014.04 Середня освіта (Математика) (Лов'янова І.В., Бобилєв Д.Є.); е) використання проектних технологій підготовки майбутнього вчителя математики до реалізації принципу наступності у навчанні (Матяш О.І., Простакова Ю.С., Свєтної О.П.).

Низка публікацій була присвячена проблемам реалізації інтегративного підходу у навчанні математики. Практичні рекомендації щодо вдосконалення внутрішньо-предметної інтеграції на уроках математики сформульовані у публікації (Gogovska V. & Malcheski R. [3]). Treacy P., O'Donoghue J. [9] пропонують авторську модель міжпредметної інтеграції математики та природничих наук у школі mathematics and science in school called "Authentic Integration". N. Cotič, M. Cotič, D. Felda, & N. Krmac [4] provided school lesson designs based on the integration of mathematics with natural sciences and specific experiences. V. Kushnir, R. Rizhnyak [14], R. Rizhniak, N. Pasichnyk, D. Zavitrenko, K. Akbash & A. Zavitrenko [8] consider the implementation of an integrative approach in teaching in the form of an integrative image.

Scientists justly consider the use of computer mathematics systems as a tool for implementing an integrative approach. B. Kramarski & C. Hirsch [6] draw attention to the possibilities of integrating self-regulated learning in such environment. O. Birgin & K. Uzun Yazici [1] determined the impact of the GeoGebra platform on the eighth-grade students' conceptual understanding and memorizing of mathematical statements. The work (D. Pope [7]) presents some practical ideas for using Desmos and GeoGebra in the sections Trigonometry and Lines and Planes in Space. G. Pinkernell, J. Diego-Mantecón, Z. Lavicza & C. Sangwin [5] analyzed the combination of STACK and GeoGebra advantages for school and academic mathematics.

Outline of unresolved issues brought up in the article. In general, scientists agree that ensuring continuity in the teaching of mathematics applying integrative components is one of the most important factors in the formation of the mathematical competence of students.

Aim of research is to determine the role of tasks of integrative content in the implementation of the continuity principle in teaching mathematics.

Research methods. During the research, the following theoretical methods were used: analysis of school mathematics curricula and educational programs for training future mathematics teachers, search, and analysis of relevant problems with further formation of problems with integrative content based on them; generalization of own and advanced pedagogical experience regarding the application of computer mathematics systems in the educational process of

під назвою "Автентична інтеграція". Cotič N., Cotič M., Felda D., & Krmac N. [4] надали розробки шкільних уроків, в основі яких лежить інтеграція математики з природничими науками та конкретним досвідом. Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. [14], Rizhniak R., Pasichnyk N., Zavitrenko D., Akbash K., Zavitrenko A. [8] реалізацію інтегративного підходу в навчанні розглядають у формі інтегративного образу.

Інструментом реалізації інтегративного підходу науковці справедливо вважають застосування систем комп’ютерної математики. Kramarski B. & Hirsch C. [6] звертають увагу на можливості інтеграції саморегульованого навчання у таких середовищах. Birgin O., & Uzun Yazıcı K. [1] визначили вплив платформи GeoGebra на концептуальне розуміння та запам’ятовування математичних викладок учнями восьмого класу. У праці (Pope D. [7]) представлено декілька практичних ідей щодо використання Desmos і GeoGebra у розділах "Тригонометрія" та "Прямі й площини в просторі". G. Pinkernell, J. Diego-Mantecón, Z. Lavicza, C. Sangwin [5] аналізували поєднання сильних сторін STACK і GeoGebra для шкільної та академічної математики.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми, яким присвячується стаття. В цілому науковці сходяться у думці про те, що забезпечення наступності у навчанні математики в умовах застосування інтегративних компонентів є одним із найважливіших чинників формування математичної компетентності здобувачів освіти.

Отже, **мета статті** полягатиме у визначенні ролі задач інтегративного змісту в реалізації принципу наступності навчання математики.

Методи дослідження. В ході дослідження використовувалися такі теоретичні методи: аналіз навчальних програм з шкільної математики та освітніх програм підготовки майбутніх вчителів математики, пошук та аналіз відповідних задач з подальшим конструюванням на їх основі задач інтегративного змісту; узагальнення власного та передового педагогічного досвіду щодо застосування secondary and higher schools. When working with pupils and students, the observation method was used. Methods of scientific knowledge were also used: systematization and generalization.

Results and discussion. Today, the integration of mathematical knowledge and skills is a key factor in determining ways to regulate the educational activities of pupils and students. This is due to the fact that getting systematic knowledge about the object of study and formation of connections between the components of this knowledge is achieved only in the process of determining and studying the features of this object transformation, when forming the selection rules and the sequence of necessary tools application for the study of this object, as well as when assessing the possibility of using generally accepted tools to study the object. At the first stages of the educational activity organization, such methods of its regulation are the subject of assimilation, and at the final stages, they turn into methods of integrative nature activities regulation. In the work V. Kushnir, R. Rizhnyak [14] concluded that the integrative line in the school mathematics course finds a more detailed implementation in the use of educational mathematical problems with integrative content. These are tasks of creative nature with a broad mathematical content and a complex structure of interrelationships between the components of their plot, which have the potential to create new problems and series of problems on their basis, to generalize the methods of solving them and to systematize a large amount of mathematical material on their basis. Solving such problems requires deep knowledge and ingenuity from a student, systematization, and generalization of acquired knowledge from various sections of school mathematics (and even from other educational disciplines, for example, information technologies, physics, economics, etc.), which in turn requires the formation of a certain level of mathematical and informational culture in a student. In the works of V. Kushnir, R. Rizhnyak [14], R. Rizhniak, N. Pasichnyk, D. Zavitrenko, K. Akbash, A. Zavitrenko [8] made a

систем комп'ютерної математики в освітньому процесі загальноосвітньої та вищої шкіл. Під час роботи з учнями та студентами застосовувався метод спостереження. Також були використанні методи наукового пізнання: систематизація та узагальнення.

Виклад основного матеріалу. Інтеграція математичних знань та умінь на сьогодні стає визначальним фактором визначення способів регулювання навчальної діяльності учнів та студентів. Це пов'язано з тим, що набуття системних знань про об'єкт вивчення і формування зв'язків між компонентами цих знань досягається лише у процесі визначення та дослідження особливостей перетворення об'єкта, при формуванні правил добору та послідовності застосування необхідних інструментів для дослідження об'єкта, а також при оцінці можливості використання загальноприйнятого інструментарію до вивчення об'єкта. На перших етапах організації навчальної діяльності такі способи її регулювання є предметом засвоєння, а на завершальних етапах перетворюються у способи регулювання діяльністю інтегративного характеру. У роботі Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. [14] дійшли висновку, що інтегративна лінія у шкільному курсі математики знаходить більш детальну реалізацію у використанні навчальних математичних задач інтегративного змісту**.** Це задачі творчого характеру з широким математичним змістом та складною структурою взаємозв'язків між компонентами їх фабули, що мають потенціал створення на їх базі нових задач та серій задач, узагальнення способів їх розв'язування та систематизації на їх базі великого обсягу математичного матеріалу. Розв'язування таких задач потребує від суб'єктів навчання глибоких знань та винахідливості, проведення систематизації та узагальнення здобутих знань з різних розділів шкільної математики (а то й з інших навчальних дисциплін, наприклад, інформаційних технологій, фізики, економіки та ін.), що в свою чергу вимагає сформованості у суб'єкта навчання певного рівня математичної та інформаційної культури. У роботах Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. [14], Rizhniak R., conclusion about formation of appropriate integrative knowledge and skills in students in the form of an integrative image of the task, which was understood as a holistic structure of abilities, that must be possessed by the student (subject of study – educate) to study the task with integrative content for the purpose of its solution and study.

On the other hand, the principle of teaching mathematical disciplines continuity (both in school and higher education establishments, and between them) involves the integration of related disciplines and the establishment of interdisciplinary connections (Y. Botuzova [2]). Moreover, the internal integration of methods, means, components and meaningful lines of mathematics itself (as a subject in school and higher education establishments) ensures the implementation of the continuity principle (Y. Botuzova, V. Nichyshina, R. Rizhnyak [10]).

Taking into account the methodological considerations mentioned above, we will consider in more detail the question of the continuity of the integrative approach application in the formation of the ability to solve inequalities with parameter. To illustrate the application of the technology, consider the problem given by the condition in a generalized form.

Problem 1. Solve the inequality:

$log_{px+qa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma a)>m,$ (1)

where x is a variable, a is a parameter, $\alpha,\beta,\gamma,p,q,m$ are real numbers.

We considered and analyzed the case of an equation with the condition where: $p=0$ and $m=0;1;2$ in (Y. Botuzova, V. Nichyshina, R. Rizhnyak [10]). Similarly to the case with an equation of the form $log_{qa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma a)=m$, we study the case with an inequality of the form $log_{qa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma a)>m$ or $log_{qa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma a)<m$, with the only difference that the areas of the plane will already be the graphical solutions of the inequalities, and, therefore, the intervals, the boundaries of which will depend on the parameter a will be the analytical solutions, as a rule.

Consider inequality (1) where $m=0$. Let us move on to an equivalent set of conditions:

Pasichnyk N., Zavitrenko D., Akbash K., Zavitrenko A. [8] зробили висновок про формування в учнів відповідних інтегративних знань і умінь у формі інтегративного образу задачі, під яким розуміли цілісну структуру здатностей, якою необхідно володіти учневі (суб'єкту навчання) для дослідження задачі інтегративного змісту на предмет її розв'язування та вивчення.

З іншої сторони, принцип наступності навчання математичних дисциплін (як в школі та ЗВО, так і між ними) передбачає інтеграцію суміжних дисциплін та встановлення міжпредметних зв'язків (Botuzova Yu. [2]). Причому внутрішня інтеграція методів, засобів, компонентів та змістовних ліній самої математики (як навчального предмету в школі та ЗВО) забезпечує реалізацію принципу наступності (Ботузова Ю.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. [10]).

Враховуючи зазначені вище методичні роздуми, розглянемо детальніше питання наступності застосування інтегративного підходу при формуванні здатностей розв'язування нерівностей з параметром. Для ілюстрації застосування технології розглянемо задачу, що задається умовою в узагальненому вигляді.

Задача 1. Розв'язати нерівність:

$log_{px+qa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma a)>m,$ (1)

де x – змінна, a – параметр, $\alpha,\beta,\gamma,p,q,m$ – дійсні числа.

Випадок рівняння з такою умовою при $p=0$ та $m=0;1;2$ нами був розглянутий та проаналізований у (Ботузова Ю.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я. [10]). Аналогічно до випадку з рівнянням виду $log_{qa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma a)=m$ досліджується і випадок з нерівністю виду $log_{qa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma a)>m$ або $log_{qa}(\alpha x^2+\beta x+\gamma a)<m$, з тою лиш різницею, що графічними розв'язками нерівностей вже будуть області площини, а, отже, аналітичними розв'язками, як правило, проміжки, межі яких будуть залежати від параметра a.

Розглянемо нерівність (1) при $m=0$. Перейдемо до рівносильної сукупності умов:

$\begin{cases} px+qa>1 \\ \alpha x^2+\beta x+\gamma a>1 \end{cases}$ or: $\begin{cases} 0<px+qa<1 \\ 0<\alpha x^2+\beta x+\gamma a<1 \end{cases}$ (2).

It is clear that in this case, in the $x0a$ coordinate system, the bounding lines of the regions that determine the solutions of inequality (1) will be parabolas and straight lines, or only straight lines (where $\alpha = 0$). Let us show it with examples.

Example 1. Solve the inequality:

$$log_{x+a}(x^2+2x+a)>0$$

Let us move on to an equivalent set of conditions:

$\begin{cases} x+a>1 \\ x^2+2x+a>1 \end{cases}$ or: $\begin{cases} 0<x+a<1 \\ 0<x^2+2x+a<1 \end{cases}$

The graphic solution of the inequality is shown in Fig. 1.

$\begin{cases} px+qa>1 \\ \alpha x^2+\beta x+\gamma a>1 \end{cases}$ або: $\begin{cases} 0<px+qa<1 \\ 0<\alpha x^2+\beta x+\gamma a<1 \end{cases}$ (2).

Зрозуміло, що в цьому випадку в системі координат $x0a$ обмежувальними лініями областей, які визначатимуть розв'язки нерівності (1), будуть параболи та прямі лінії, або лише прямі лінії (при $\alpha = 0$). Покажемо це на прикладах.

Приклад 1. Розв'язати нерівність:

$$log_{x+a}(x^2+2x+a)>0$$

Перейдемо до рівносильної сукупності умов:

$\begin{cases} x+a>1 \\ x^2+2x+a>1 \end{cases}$ або: $\begin{cases} 0<x+a<1 \\ 0<x^2+2x+a<1 \end{cases}$

Графічний розв'язок нерівності зображений на рис. 1.

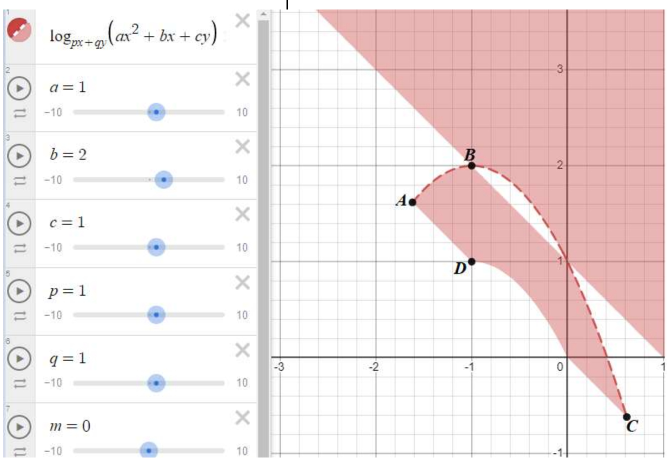


Fig. 1. The region that is the solution of the inequality $\boldsymbol{log_{x+a}(x^2+2x+a)>0}$

Here the points with coordinates: $A\left(\frac{-1-\sqrt5}{2}; \frac{1+\sqrt5}{2}\right), B(-1;2), C\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}; \frac{1-\sqrt5}{2}\right), D(-1;1)$. Therefore, the solutions of the inequality are as follows:

where $a \in]-\infty; \frac{1-\sqrt5}{2}]$ $x \in]1-a;\ +\infty[$,

where $a \in]\frac{1-\sqrt5}{2}; 0]$ $x \in]-a;\ -1+\sqrt{2-a}[\cup]1-a;\ +\infty[$,

where $a \in]0;1]$ $x \in]-1+\sqrt{1-a};\ -1+\sqrt{2-a}[\cup]1-a;\ +\infty[$,

where $a \in]1; \frac{1+\sqrt5}{2}]$ $x \in]-a; 1-a[\cup]-1+\sqrt{2-a};\ +\infty[$,

where $a \in]\frac{1+\sqrt5}{2}; 2]$ $x \in]-1-\sqrt{2-a}; 1-a[\cup]-1+\sqrt{2-a};\ +\infty[$,

where $a \in]2;+\infty[$ $x \in]1-a;\ +\infty[$.

Example 2. Solve the inequality:

$$log_{x+a}(2x+a)>0$$

Let us move on to an equivalent set of conditions:

Тут точки з координатами: $A\left(\frac{-1-\sqrt5}{2}; \frac{1+\sqrt5}{2}\right), B(-1;2), C\left(\frac{-1+\sqrt5}{2}; \frac{1-\sqrt5}{2}\right), D(-1;1)$. Отже, розв'язки нерівності такі:

при $a \in \left]-\infty; \frac{1-\sqrt5}{2}\right]$ $x \in]1-a;\ +\infty[$,

при $a \in \left]\frac{1-\sqrt5}{2}; 0\right]$ $x \in \left]-a;\ -1+\sqrt{2-a}\right[\cup]1-a;\ +\infty[$,

при $a \in]0;1]$ $x \in \left]-1+\sqrt{1-a};\ -1+\sqrt{2-a}\right[\cup]1-a;\ +\infty[$,

при $a \in \left]1; \frac{1+\sqrt5}{2}\right]$ $x \in]-a; 1-a[\cup \left]-1+\sqrt{2-a};\ +\infty\right[$,

при $a \in \left]\frac{1+\sqrt5}{2}; 2\right]$ $x \in \left]-1-\sqrt{2-a}; 1-a\right[\cup \left]-1+\sqrt{2-a};\ +\infty\right[$,

при $a \in]2;+\infty[$ $x \in]1-a;\ +\infty[$.

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

$$log_{x+a}(2x+a)>0.$$

Перейдемо до рівносильної сукупності умов:

$\begin{cases} x+a>1 \\ 2x+a>1 \end{cases}$ or: $\begin{cases} 0<x+a<1 \\ 0<2x+a<1 \end{cases}$

The graphic solution of the inequality is shown in fig. 2.

$\begin{cases} x+a>1 \\ 2x+a>1 \end{cases}$ або: $\begin{cases} 0<x+a<1 \\ 0<2x+a<1 \end{cases}$

Графічний розв'язок нерівності зображений на рис. 2.

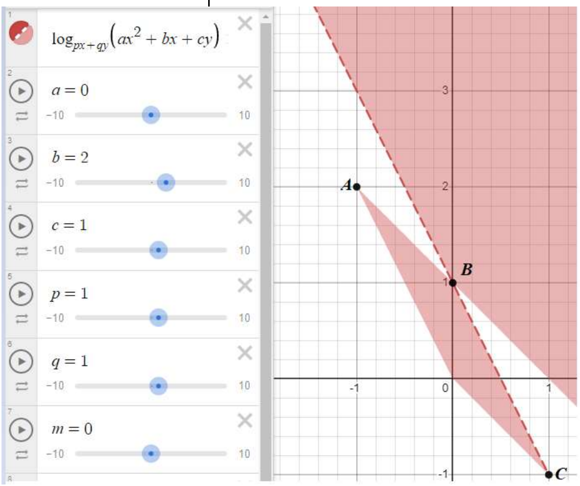


Fig. 2. The region that is a solution to the inequality $log_{x+a}(2x+a)>0$

Here are the points with coordinates: $A(-1;\ 2)$, $B(0;1)$, $C(1;\ -1)$. Therefore, the solutions of the inequality are as follows:

where $a \in]-\infty;\ -1]$ $x \in]1-a;\ +\infty[$,

where $a \in]-1;\ 0]$ $x \in]-a; \frac{1-a}{2}[\cup]1-a;\ +\infty[$,

where $a \in]0;\ 1]$ $x \in]-\frac{a}{2}; \frac{1-a}{2}[\cup]1-a;\ +\infty[$,

where $a \in]1;\ 2]$ $x \in]-\frac{a}{2}; 1-a[\cup]\frac{1-a}{2};\ +\infty[$,

where $a \in]2; +\infty[$ $x \in]\frac{1-a}{2};\ +\infty[$.

Consider inequality (1) where $m=1$. Let us move on to an equivalent set of conditions:

$\begin{cases} px+qa>1 \\ \alpha x^2+\beta x+\gamma a>px+qa \end{cases}$ or: $\begin{cases} 0<px+qa<1 \\ 0<\alpha x^2+\beta x+\gamma a<px+qa \end{cases}$ (3).

In this case, in the $x0a$ coordinate system, the bounding lines of the regions that determine the solutions of inequality (1) will also be parabolas and straight lines, or only straight lines (where $\alpha=0$). You can verify this by solving examples 3 and 4.

Example 3. Solve the inequality: $log_{x+a}\left(x^2+3x+\frac{3}{2}a\right)>1.$

Example 4. Solve the inequality: $log_{x+a}\left(3x+\frac{3}{2}a\right)>1.$

Graphic solutions of these examples are shown in fig. 3 and 4.

Тут точки з координатами: $A(-1;\ 2), B(0;1), C(1;\ -1)$. Отже, розв'язки нерівності такі:

при $a \in]-\infty;\ -1]$ $x \in]1-a;\ +\infty[$,

при $a \in]-1;\ 0]$ $x \in \left]-a; \frac{1-a}{2}\right[\cup]1-a;\ +\infty[$,

при $a \in]0;\ 1]$ $x \in \left]-\frac{a}{2}; \frac{1-a}{2}\right[\cup]1-a;\ +\infty[$,

при $a \in]1;\ 2]$ $x \in \left]-\frac{a}{2}; 1-a\right[\cup \left]\frac{1-a}{2};\ +\infty\right[$,

при $a \in]2; +\infty[$ $x \in \left]\frac{1-a}{2};\ +\infty\right[$.

Розглянемо нерівність (1) при $m=1$. Перейдемо до рівносильної сукупності умов:

$\begin{cases} px+qa>1 \\ \alpha x^2+\beta x+\gamma a>px+qa \end{cases}$ або: $\begin{cases} 0<px+qa<1 \\ 0<\alpha x^2+\beta x+\gamma a<px+qa \end{cases}$ (3).

В цьому випадку в системі координат $x0a$ обмежувальними лініями областей, які визначатимуть розв'язки нерівності (1), також будуть параболи та прямі лінії, або лише прямі лінії (при $\alpha=0$). В цьому можна пересвідчитися, розв'язавши приклади 3 та 4.

Приклад 3. Розв'язати нерівність: $log_{x+a}\left(x^2+3x+\frac{3}{2}a\right)>1.$

Приклад 4. Розв'язати нерівність: $log_{x+a}\left(3x+\frac{3}{2}a\right)>1.$

Графічні розв'язки цих прикладів зображені на рис. 3 та 4.

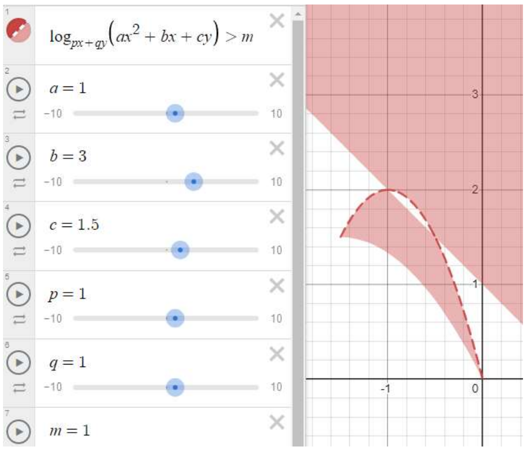


Fig. 3. Solution of the inequality

$$\boldsymbol{log_{x+a}\left(x^2+3x+\frac{3}{2}a\right)>1}$$

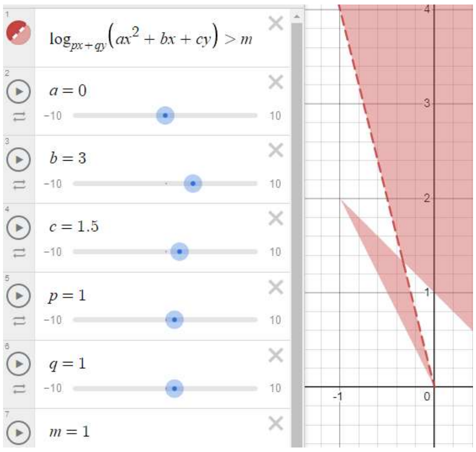


Fig. 4. Solving the inequality

$$\boldsymbol{log_{x+a}\left(3x+\frac{3}{2}a\right)>1}$$

Let us consider the most interesting case when $m = 2$. Let us move on to an equivalent set of conditions:

$$\begin{cases} px+qa>1 \\ \alpha x^2+\beta x+\gamma a>(px+qa)^2 \end{cases} \quad \text{or:} \quad \begin{cases} 0<px+qa<1 \\ 0<\alpha x^2+\beta x+\gamma a<(px+qa)^2 \end{cases} \quad (4).$$

In this case, in the $x0a$ coordinate system, the bounding lines of the regions that determine the solutions of inequality (1) at $q \neq 0$ will be second-order lines (ellipses, hyperbolas, parabolas) or a pair of straight lines and straight lines, or parabolas (where $q = 0, p \neq 0, \alpha \neq 0$) and straight lines. Let us consider such cases with examples.

Example 5. Solve the inequality: $log_{x+a}(x^2+2x+2a)>2$.

Let us move on to an equivalent set of conditions:

$$\begin{cases} x+a>1 \\ x^2+2x+2a>(x+a)^2 \end{cases} \quad \text{or:} \quad \begin{cases} 0<x+a<1 \\ 0<x^2+2x+2a<(x+a)^2 \end{cases}$$

Let us find out the line represented by the condition $x^2+2x+2a=(x+a)^2$. Having opened the brackets, we will do the transformation: $a^2+2ax-2x-2a=0$, *or*

$$(a^2+2ax+x^2)-(x^2+2x+1)-2a+1=0,$$

or $(x+a)^2-(x+1)^2-2a+1=0$.

Let us replace the variable $x+a=a'$. Then we have:

$$(a')^2-x^2-2x-1-2(a'-x)+1=0,$$

$$or \quad (a'-1)^2-x^2=1.$$

We got a hyperbola in a new coordinate system. In the $x0a$ coordinate system, it is presented in fig. 5.

Розглянемо найбільш цікавий випадок, коли $m = 2$. Перейдемо до рівносильної сукупності умов:

$$\begin{cases} px+qa>1 \\ \alpha x^2+\beta x+\gamma a>(px+qa)^2 \end{cases} \quad \text{або:} \quad \begin{cases} 0<px+qa<1 \\ 0<\alpha x^2+\beta x+\gamma a<(px+qa)^2 \end{cases} \quad (4).$$

В цьому випадку в системі координат $x0a$ обмежувальними лініями областей, які визначатимуть розв'язки нерівності (1), при $q \neq 0$ будуть лінії другого порядку (еліпси, гіперболи, параболи) або пара прямих та прямі лінії, або параболи (при $q = 0, p \neq 0, \alpha \neq 0$) та прямі лінії. Розглянемо такі випадки на прикладах.

Приклад 5. Розв'язати нерівність: $log_{x+a}(x^2+2x+2a)>2$.

Перейдемо до рівносильної сукупності умов:

$$\begin{cases} x+a>1 \\ x^2+2x+2a>(x+a)^2 \end{cases} \quad \text{або:} \quad \begin{cases} 0<x+a<1 \\ 0<x^2+2x+2a<(x+a)^2 \end{cases}$$

Вияснимо, яку лінію зображає умова $x^2+2x+2a=(x+a)^2$. Розкривши дужки, проведемо перетворення:

$$a^2+2ax-2x-2a=0, \quad \text{або}$$

$$(a^2+2ax+x^2)-(x^2+2x+1)-2a+1=0,$$

або $(x+a)^2-(x+1)^2-2a+1=0$.

Зробимо заміну змінної $x+a=a'$. Тоді маємо:

$$(a')^2-x^2-2x-1-2(a'-x)+1=0,$$

$$\text{або} \quad (a'-1)^2-x^2=1.$$

Отже, отримали гіперболу у новій системі координат. В системі координат $x0a$ вона представлена на рис. 5.

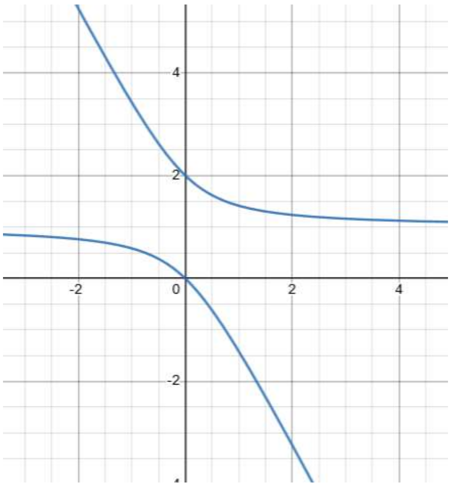


Fig. 5. Hyperbola

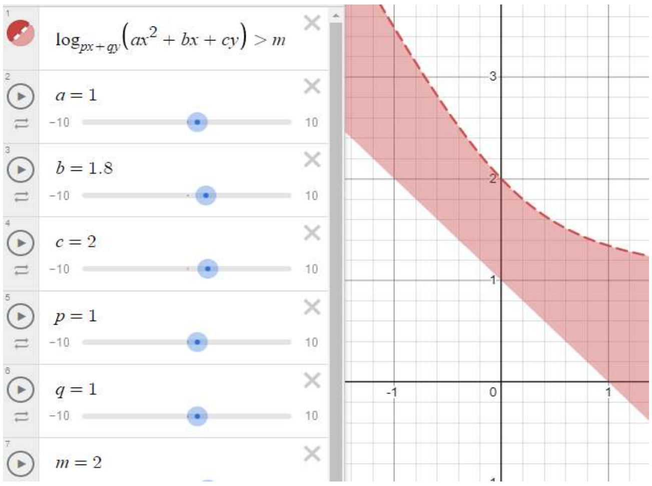


Fig. 6. Solving the inequality $log_{x+a}(x^2+2x+2a) > 2$

Taking into account the equivalent set of conditions, the graphical solution looks as shown in fig. 6, and the analytical one is written as follows:

where $a \in]-\infty; 1]$ $x \in]1-a;\ +\infty[$,

where $a \in]1;\ +\infty[$ $x \in]1-a;\ \frac{a^2-2a}{2-2a}[$.

Example 6. Solve the inequality: $log_{2x+a}(x^2+2x+2a) > 2$.

Let us move on to an equivalent set of conditions:

$$\begin{cases} 2x+a>1 \\ x^2+2x+2a>(2x+a)^2 \end{cases} \text{ or: } \begin{cases} 0<2x+a<1 \\ 0<x^2+2x+2a<(2x+a)^2 \end{cases}$$

Let us find out the line represented by the condition $x^2+2x+2a=(2x+a)^2$. Having opened the brackets, we will do the transformation:

$$3x^2+a^2+4ax-2x-2a=0,$$
$$\text{or } (4x^2+4ax+a^2)-x^2-2x-2a=0,$$
$$\text{or } (2x+a)^2-x^2+2x-2(2x+a)=0.$$

Let us replace the variable $2x+a=a'$. Then we have:

$$(a')^2-x^2+2x-2a'=0,$$
$$or\ (a')^2-2a+1-x^2+2x-1=0,$$
$$\text{or } (a'-1)^2-(x-1)^2=0$$

We got a pair of straight lines in the new coordinate system.

In the $x0a$ coordinate system, these are the lines $a=-x,\ a=2-3x$.

З врахуванням рівносильної сукупності умов графічний розв'язок виглядає як представлений на рис. 6, а аналітичний записується так:

при $a \in]-\infty; 1]$ $x \in]1-a;\ +\infty[$,

при $a \in]1;\ +\infty[$ $x \in \left]1-a;\ \frac{a^2-2a}{2-2a}\right[$.

Приклад 6. Розв'язати нерівність: $log_{2x+a}(x^2+2x+2a) > 2$.

Перейдемо до рівносильної сукупності умов:

$$\begin{cases} 2x+a>1 \\ x^2+2x+2a>(2x+a)^2 \end{cases} \text{ або: } \begin{cases} 0<2x+a<1 \\ 0<x^2+2x+2a<(2x+a)^2 \end{cases}$$

Виясним, яку лінію зображає умова $x^2+2x+2a=(2x+a)^2$. Розкривши дужки, проведемо перетворення:

$$3x^2+a^2+4ax-2x-2a=0,$$
$$\text{або } (4x^2+4ax+a^2)-x^2-2x-2a=0,$$
$$\text{або } (2x+a)^2-x^2+2x-2(2x+a)=0.$$

Зробимо заміну змінної $2x+a=a'$. Тоді маємо:

$$(a')^2-x^2+2x-2a'=0,$$
$$\text{або } (a')^2-2a+1-x^2+2x-1=0,$$
$$\text{або } (a'-1)^2-(x-1)^2=0$$

Отже, отримали пару прямих у новій системі координат. В системі координат $x0a$ це прямі $a=-x,\ a=2-3x$.

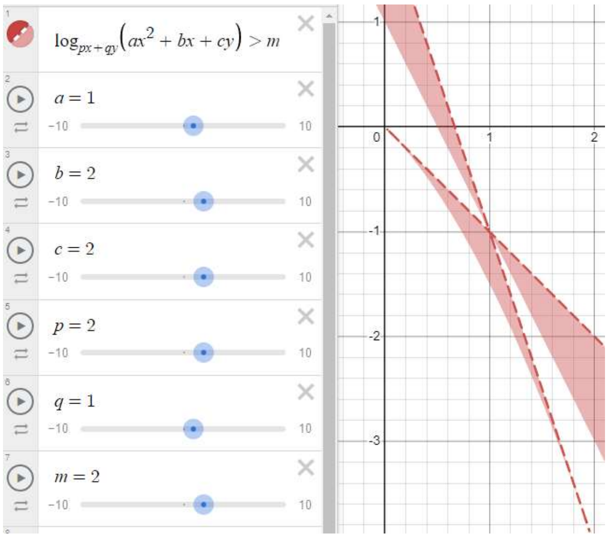


Fig. 7. Solving the inequality $log_{2x+a}(x^2+2x+2a) > 2$

Taking into account the equivalent set of conditions, the graphical solution looks as shown in fig. 7, and the analytical one is written as follows:

where $a \in]-\infty;\ -4]$ $x \in]-\frac{a}{2};\ -a[$,

where $a \in]-4;\ -1]$ $x \in]-1+\sqrt{1-2a};\ -\frac{a-2}{3}[\cup]-\frac{a}{2};\ -a[$,

where $a \in]-1;\ 0[$ $x \in]-1+\sqrt{1-2a};\ -a[\cup]-\frac{a}{2};\ -\frac{a-2}{3}[$,

where $a \in [0;+\infty[$ $x \in]-\frac{a}{2};\ -\frac{a-2}{3}[$.

Example 7. Solve the inequality: $log_{x+a}(-2x^2+2x+2a) > 2$.

Let us move on to an equivalent set of conditions:

$$\begin{cases} x+a>1 \\ -2x^2+2x+2a>(x+a)^2 \end{cases} \text{ or: } \begin{cases} 0<x+a<1 \\ 0<-2x^2+2x+2a<(x+a)^2 \end{cases}$$

Let us find out the line represented by the condition $-2x^2+2x+2a=(x+a)^2$. Having opened the brackets, we will do the transformation:

$$3x^2+a^2+2ax-2x-2a=0,$$
$$\text{or } (x^2+2ax+a^2)+2x^2-2x-2a=0,$$
$$\text{or } (x+a)^2+2x^2+2(x+a)=0.$$

Let's replace the variable $x+a=a'$. Then we have:

$$(a')^2+2a'+1+2x^2=1,$$
$$\text{or } (a'+1)^2+2x^2=1$$

We got an ellipse in the new coordinate system fig. 8.

З врахуванням рівносильної сукупності умов графічний розв'язок виглядає як представлений на рис. 7, а аналітичний записується так:

при $a \in]-\infty;\ -4]$ $x \in \left]-\frac{a}{2};\ -a\right[$,

при $a \in]-4;\ -1]$ $x \in]-1+\sqrt{1-2a};\ -\frac{a-2}{3}[\cup]-\frac{a}{2};\ -a[$,

при $a \in]-1;\ 0[$ $x \in]-1+\sqrt{1-2a};\ -a[\cup]-\frac{a}{2};\ -\frac{a-2}{3}[$,

при $a \in [0;+\infty[$ $x \in \left]-\frac{a}{2};\ -\frac{a-2}{3}\right[$.

Приклад 7. Розв'язати нерівність: $log_{x+a}(-2x^2+2x+2a) > 2$.

Перейдемо до рівносильної сукупності умов:

$$\begin{cases} x+a>1 \\ -2x^2+2x+2a>(x+a)^2 \end{cases} \text{ або: } \begin{cases} 0<x+a<1 \\ 0<-2x^2+2x+2a<(x+a)^2 \end{cases}$$

Вияснимо, яку лінію зображає умова $-2x^2+2x+2a=(x+a)^2$. Розкривши дужки, проведемо перетворення:

$$3x^2+a^2+2ax-2x-2a=0,$$
$$\text{або } (x^2+2ax+a^2)+2x^2-2x-2a=0,$$
$$\text{або } (x+a)^2+2x^2+2(x+a)=0.$$

Зробимо заміну змінної $x+a=a'$. Тоді маємо:

$$(a')^2+2a'+1+2x^2=1,$$
$$\text{або } (a'+1)^2+2x^2=1$$

Отже, отримали еліпс у новій системі координат (рис. 8).

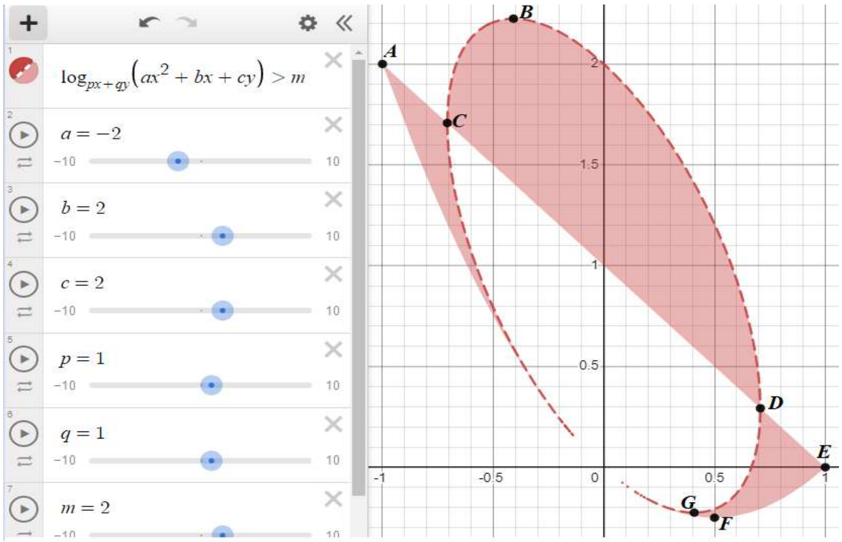


Fig. 8. Solving the inequality $log_{x+a}(-2x^2+2x+2a) > 2$

Along with this $A(-1;2)$, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E(1;0)$; $F\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$; $G\left(\frac{1}{\sqrt{6}};1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

Taking into account the equivalent set of conditions, the graphical solution looks as shown in fig. 8, and the analytical one is written as follows:

where $a \in]-\infty; -\frac{1}{4}] \cup [1+\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty[$ $x \in \emptyset$,

where $a\in\left]-\frac{1}{4}; 1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ $x\in\left]\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right[$,

where $a \in]1-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0[$ $x\in\left]\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\frac{1-a-\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[\cup\left]\frac{1-a+\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3};\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right[$,

where $a\in[0;1-\frac{1}{\sqrt{2}}[$ $x\in\left]\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\frac{1-a-\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[\cup\left]\frac{1-a+\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3};-a\right[$,

where $a \in [1-\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}[$ $x\in\left]\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\frac{1-a-\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[\cup\left]-a;\frac{1-a+\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[$,

where $a \in [1+\frac{1}{\sqrt{2}};2[$ $x \in \left]\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};-a\right[\cup\left]\frac{1-a-\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3};\frac{1-a+\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[$,

where $a\in[2;1+\sqrt{\frac{3}{2}}[$ $x\in\left]\frac{1-a-\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3};\frac{1-a+\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[$

Example 8. Solve the inequality: $log_{\frac{x}{2}+a}(2x+2a) > 2$.

Причому, $A(-1;2)$, $B\left(-\frac{1}{\sqrt{6}};1+\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $C\left(-\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $D\left(\frac{1}{\sqrt{2}};1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $E(1;0)$; $F\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{4}\right)$; $G\left(\frac{1}{\sqrt{6}};1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

З врахуванням рівносильної сукупності умов графічний розв'язок виглядає як представлений на рис. 8, а аналітичний записується так:

при $a \in \left]-\infty; -\frac{1}{4}\right] \cup \left[1+\sqrt{\frac{3}{2}}; +\infty\right[$ $x \in \emptyset$,

при $a\in\left]-\frac{1}{4}; 1-\sqrt{\frac{3}{2}}\right]$ $x\in\left]\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right[$,

при $a\in\left]1-\sqrt{\frac{3}{2}}; 0\right[$ $x\in\left]\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\frac{1-a-\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[\cup\left]\frac{1-a+\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3};\frac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right[$,

при $a\in[0;1-\frac{1}{\sqrt{2}}[$ $x\in\left]\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\frac{1-a-\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[\cup\left]\frac{1-a+\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3};-a\right[$

при $a\in\left[1-\frac{1}{\sqrt{2}};1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right[$ $x\in\left]\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};\frac{1-a-\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[\cup\left]-a;\frac{1-a+\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[$,

при $a \in [1+\frac{1}{\sqrt{2}};2[$ $x \in \left]\frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2};-a\right[\cup\left]\frac{1-a-\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3};\frac{1-a+\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[$,

при $a\in[2;1+\sqrt{\frac{3}{2}}[$ $x\in\left]\frac{1-a-\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3};\frac{1-a+\sqrt{-2a^2+4a+1}}{3}\right[$

Приклад 8. Розв'язати нерівність: $log_{\frac{x}{2}+a}(2x+2a) > 2$.

Let us move on to an equivalent set of conditions:

$\begin{cases} \frac{x}{2}+a>1 \\ 2x+2a>\left(\frac{x}{2}+a\right)^2 \end{cases}$ or: $\begin{cases} 0<\frac{x}{2}+a<1 \\ 0<2x+2a<\left(\frac{x}{2}+a\right)^2 \end{cases}$

Let us find out the line represented by the condition $2x+2a=\left(\frac{x}{2}+a\right)^2$. Having opened the brackets, we will do the transformation: $x^2+4a^2+4ax-8x-8a=0$,

or $(x+2a)^2-4(x+2a)-4x=0$.

Let us replace the variable $x+2a=a'$. Then we have:

$(a')^2-4a'+4-4x-4=0$, or $(a'-2)^2=4(x+1)$

We got a parabola (fig. 9), and: $A(-2;2), B\left(-1;\frac{3}{2}\right), C(0;2)$.

Перейдемо до рівносильної сукупності умов:

$\begin{cases} \frac{x}{2}+a>1 \\ 2x+2a>\left(\frac{x}{2}+a\right)^2 \end{cases}$ або: $\begin{cases} 0<\frac{x}{2}+a<1 \\ 0<2x+2a<\left(\frac{x}{2}+a\right)^2 \end{cases}$

Виясним, яку лінію зображає умова $2x+2a=\left(\frac{x}{2}+a\right)^2$. Розкривши дужки, проведемо перетворення: $x^2+4a^2+4ax-8x-8a=0$,

або $(x+2a)^2-4(x+2a)-4x=0$.

Зробимо заміну змінної $x+2a=a'$. Тоді маємо:

$(a')^2-4a'+4-4x-4=0$, або $(a'-2)^2=4(x+1)$

Отже, отримали параболу (рис. 9), причому: $A(-2;2), B\left(-1;\frac{3}{2}\right), C(0;2)$.

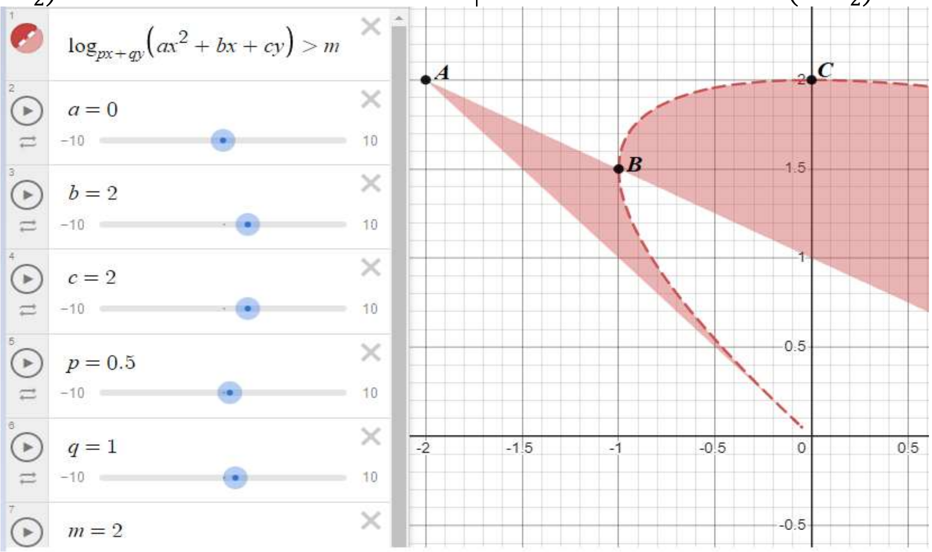


Fig. 9. Solving the inequality $log_{\frac{x}{2}+a}(2x+2a)>2$

Taking into account the equivalent set of conditions, the graphical solution looks as shown in fig. 9, and the analytical one is written as follows:

where $a \in]-\infty; 0]$ $x \in]2(1-a); 4-2a+2\sqrt{4-2a}[$,

where $a \in]0; \frac{3}{2}]$ $x \in]-a; 4-2a-2\sqrt{4-2a}[\cup]2(1-a); 4-2a+2\sqrt{4-2a}[$,

where $a \in]\frac{3}{2}; 2[$ $x \in]-a; 2(1-a)[\cup]4-2a-2\sqrt{4-2a}; 4-2a+2\sqrt{4-2a}[$,

where $a \in [2; +\infty[$ $x \in \emptyset$.

The formation of systematic mathematical knowledge among students is facilitated by the use of partially search and research teaching methods, in the process of which in-depth studies of mathematical objects (for example, logarithmic inequalities with

З врахуванням рівносильної сукупності умов графічний розв'язок виглядає як представлений на рис. 9, а аналітичний записується так:

при $a \in]-\infty; 0]$ $x \in]2(1-a); 4-2a+2\sqrt{4-2a}[$,

при $a \in \left]0; \frac{3}{2}\right]$ $x \in]-a; 4-2a-2\sqrt{4-2a}[\cup]2(1-a); 4-2a+2\sqrt{4-2a}[$,

при $a \in \left]\frac{3}{2}; 2\right[$ $x \in]-a; 2(1-a)[\cup]4-2a-2\sqrt{4-2a}; 4-2a+2\sqrt{4-2a}[$,

при $a \in [2; +\infty[$ $x \in \emptyset$.

Формуванню у здобувачів освіти системних математичних знань сприяє використання частково-пошукових та дослідницьких методів навчання, в процесі реалізації яких здійснюються глибокі дослідження математичних parameters) are carried out with the help of available tools, in particular, software tools Desmos, GeoGebra, etc., as demonstrated above. Having mastered the technique of solving logarithmic inequalities and computer tools that allow us to demonstrate the dynamics of changes in solutions with changing parameters, we build an integrated image. However, taking into account the principle of continuity of teaching mathematical disciplines it is too early to talk about its completeness. It is possible to offer the studied logarithmic inequalities with parameters to students who are studying the course "Mathematical Analysis" at the Higher Education Establishment and are already familiar with the methods of calculating triple integrals.

We can formulate the research problem for students as follows: "Establish the correspondence between the region of integration and the solution of the logarithmic inequality, choosing the parameters in both problems accordingly."

We will give examples of such a task implementation with the help of software tools GeoGebra (for constructing space bodies and their projections) and Desmos (for constructing solutions of logarithmic inequalities).

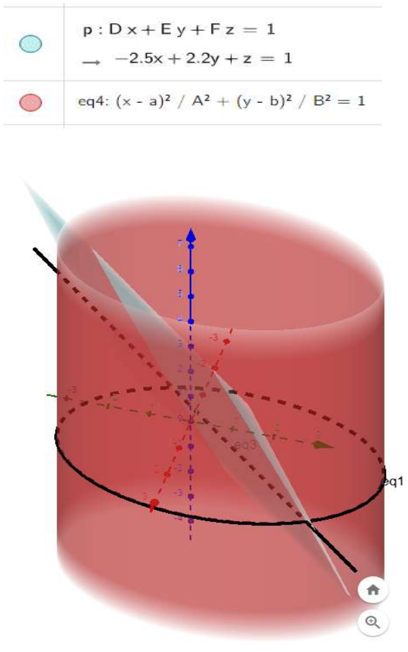
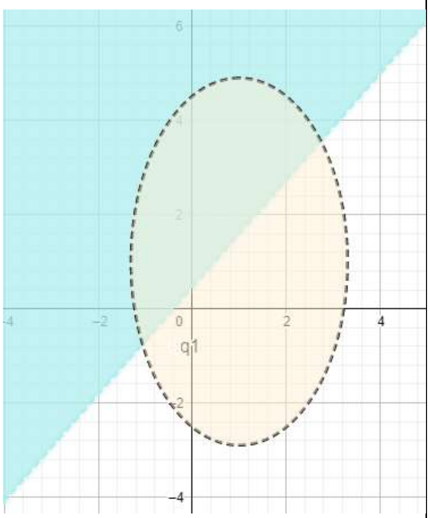
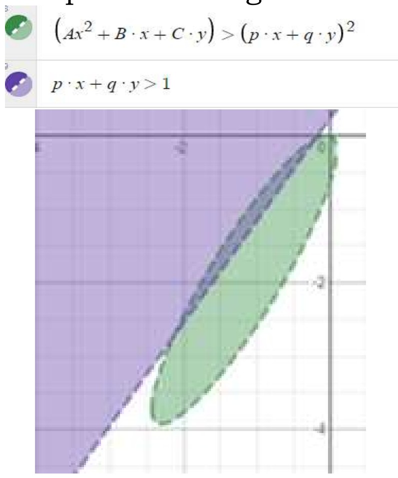
Case 1. *A cylinder and plane surface body:*

об'єктів (наприклад, логарифмічних нерівностей з параметрами) за допомогою доступних інструментів, зокрема програмних засобів Desmos, GeoGebra та ін., як це було продемонстровано вище. Опанувавши техніку розв'язування логарифмічних нерівностей та комп'ютерний інструментарій, який дозволяє продемонструвати динаміку зміни розв'язків із зміною параметрів, вибудовуємо інтегрований образ. Але, враховуючи принцип наступності навчання математичних дисциплін, говорити про його вичерпність зарано. Вбачається можливість пропонувати досліджувані логарифмічні нерівності з параметрами студентам, які вивчають курс "Математичного аналізу" у ЗВО і вже знайомі зі способами обчислення потрійних інтегралів.

Дослідницьку задачу для студентів можемо сформулювати наступним чином: "Встановити відповідність між областю інтегрування та розв'язком логарифмічної нерівності, підібравши відповідним чином параметри в обох задачах".

Наведемо приклади реалізації такої задачі за допомогою програмних засобів GeoGebra (для побудови просторових тіл та їх проекцій) та Desmos (для побудови розв'язків логарифмічної нерівності).

Випадок 1. *Тіло обмежене циліндром та площиною:*

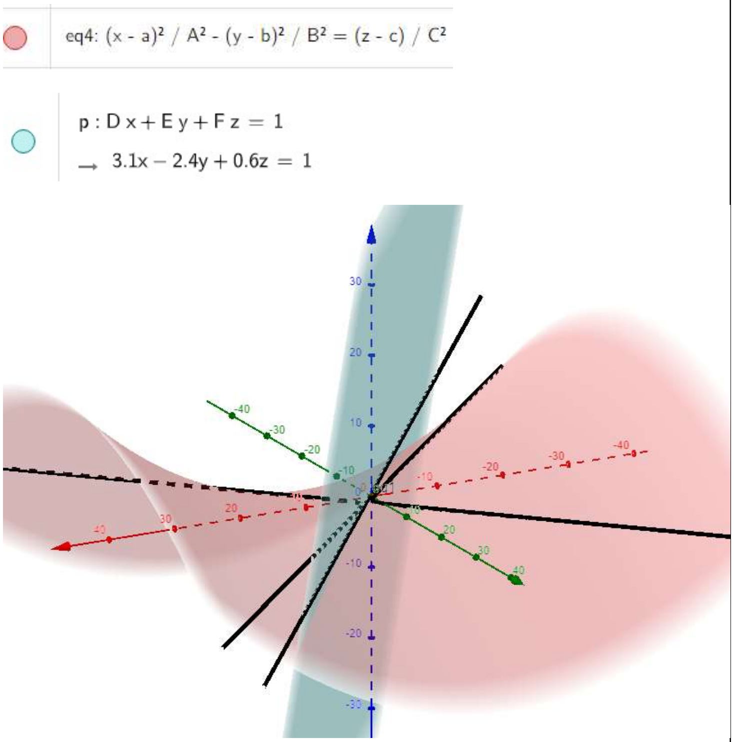
<table>
<tr><td>Calculate the volume of the body bounded by the surfaces</td><td>Projection of the body onto the XoY plane</td><td>Selection of parameters for the logarithmic inequality, which will allow comparison of regions</td></tr>
<tr><td>
</td><td></td><td>

(the inequality has been transformed for better visualization)</td></tr>
</table>

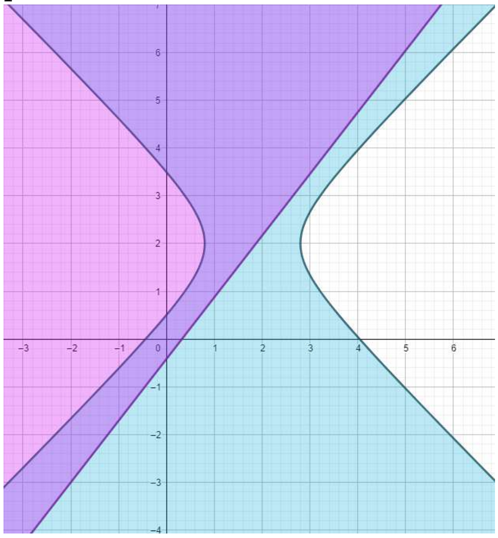
Case 2. *A body bounded by a hyperboloid and a plane:*

Випадок 2. *Тіло обмежене гіперболоїдом та площиною:*

Calculate the volume of the body bounded by the surfaces



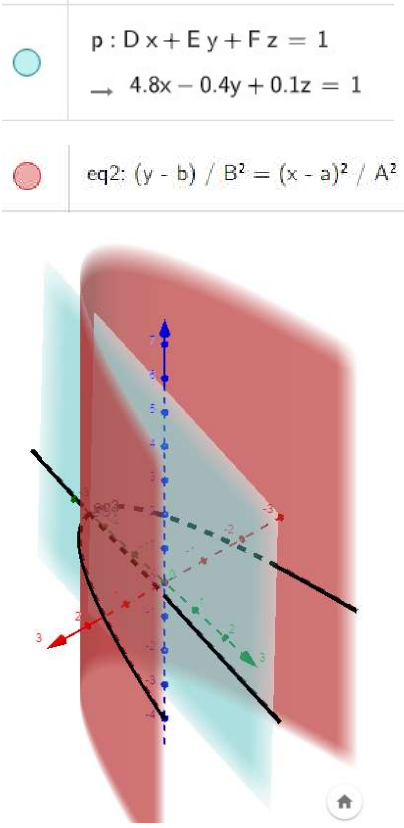
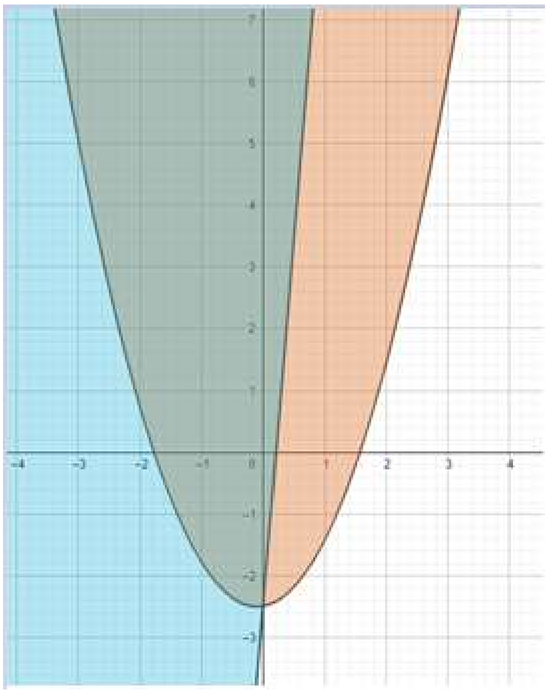
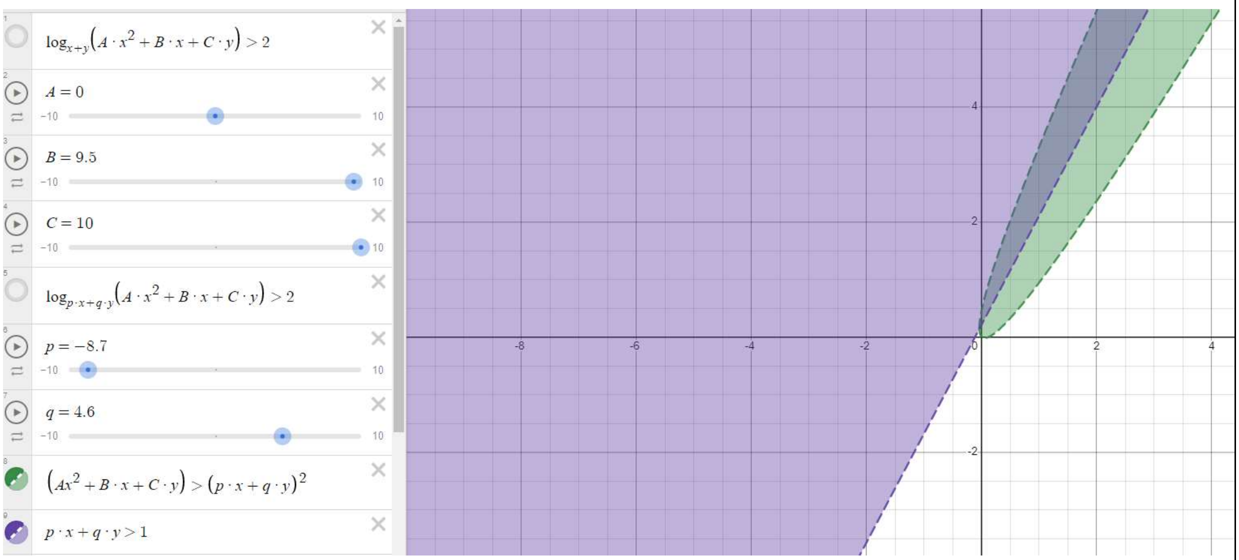
Projection of the body onto the XoY plane



Selection of parameters for the logarithmic inequality, which will allow comparison of regions

Case 3. *The body bounded by a cylindrical surface and a plane:*

Випадок 3. *Тіло обмежене циліндричною поверхнею та площиною:*

<table>
<tr><td>Calculate the volume of the body bounded by the surfaces

</td><td>Projection of the body onto the XoY plane
</td></tr>
<tr><td colspan="2">Selection of parameters for the logarithmic inequality, which will allow comparison of regions

</td></tr>
</table>

The presented number of problems creates a wide enough field for conducting research using scientific methods of

Представлений ряд задач створює достатньо широке поле для проведення досліджень з використанням наукових analogy, analysis, synthesis, comparison and collation. This allows you to build more complex integrated images and consolidate various mathematical objects, which, in turn, contributes to the formation of deep mathematical knowledge, mathematical and digital competences.

When performing the research described above we used the DESMOS graphic calculator. This is not the only tool that can be used for such purposes. GeoGebra, GRAN, DG, Advanced Grapher can be named among the environments with similar properties (unfortunately, the last package does not have a Ukrainian localization if possible). The use of ICT in solving and composing mathematical problems has practically unlimited possibilities for creating integrated images (in the context of the work (V. Kushnir, R. Rizhnyak [14]) – an integrated image of a problem, a problem series, and a method of solving a problem). Moreover, the volume of the integrated image, the application of which leads to the real integration of educational mathematical material, is quite simply determined depending on the goal set by the teacher, or even by a student oneself, if we are talking about self-education. The question arises how to move towards the given volume of the integrated image. One of the options is shown in the research results – we simulated the problem situation in the DESMOS graphic calculator, changing the parameters $\alpha, \beta, \gamma, p, q, m$ of Problem 1 with the appropriate sliders in the calculator, choosing the "best option" for the future problem. Another option is the analysis of problem 1 condition using identical transformations and methods of solving equations and inequalities with access to specific conditions in which we will "recognize" specific curves or lines. Of course, the path is more complicated, but it can always be checked using the same calculator. Our position is that if every student has the opportunity to use ICT when solving mathematical problems, both ways should be used to form real mathematical abilities.

The second moment. When we talk about the mathematical abilities of

методів аналогії, аналізу, синтезу, порівняння та співставлення. Це дозволяє вибудовувати більш складні інтегровані образи та укрупнювати різноманітні математичні об’єкти, що, в свою чергу, сприяє формуванню глибоких математичних знань, математичної та інформаційно-цифрової компетентностей.

При проведенні описаного вище дослідження (як, зрештою, і попередньої нашої розвідки (Ботузова Ю.В., Нічишина В.В., Ріжняк Р.Я., 2022)) ми користувалися графічним калькулятором DESMOS. Це не єдиний засіб, який можна використовувати для таких цілей. Серед середовищ з подібними властивостями можна назвати GeoGebra, GRAN, DG, Advanced Grapher (на жаль, за гарних можливостей останній пакет не має української локалізації). Використання ІКТ при розв’язуванні та складанні математичних задач має практично необмежені можливості для створення інтегрованих образів (в контексті роботи (Кушнір В.А., Ріжняк Р.Я. [14]) – інтегрованого образу задачі, задачної серії та способу розв’язування задачі). Причому обсяг інтегрованого образу, застосування якого і приводить до реальної інтеграції навчального математичного матеріалу, досить просто визначається в залежності від мети, поставленої вчителем, або й навіть самим учнем, якщо мова йде про самоосвіту. Виникає питання, а яким же шляхом можна рухатися до заданого обсягу інтегрованого образу. Один з варіантів нами показаний у результатах дослідження – ми моделювали задачну ситуацію у графічному калькуляторі DESMOS, змінюючи параметри $\alpha, \beta, \gamma, p, q, m$ Задачі 1 відповідними повзунками у калькуляторі, обираючи "найкращий варіант" майбутньої задачі. Інший варіант – аналіз умови задачі 1 з використанням тотожних перетворень та способів розв’язування рівнянь та нерівностей з виходом на конкретні умови, в яких будемо "пізнавати" конкретні криві чи лінії. Безумовно, шлях складніший, але його завжди можна перевірити з використанням того ж калькулятора. Наша позиція – при наявній можливості кожного учня користуватися ІКТ при розв’язуванні математичних задач pupils or students, we obviously mean the ability to create, investigate and solve mathematical models. Therefore, an important role is played by tasks of integrative content, the application of which falls on the stages of generalization and systematization of mathematical skills. It is the application of such problems, the study of their solutions, their development in a series and the application of their solutions to other problems that allows us to talk about the possibility of transforming mathematical skills into mathematical abilities and beliefs. The implementation of an integrative approach to teaching mathematics at school and in higher education establishments is based on such tasks. And since the integration of methods, means, components and content lines of mathematics itself as an educational subject ensures the implementation of the continuity principle in the study of this subject between different links of education, we can assert the existence of a direct connection between this principle and the use of tasks of integrative content in teaching.

Conclusions and research perspectives. The study of the role of integrative content problems in the implementation of continuity principle in teaching mathematics made it possible to conclude the following.

First, the use of integrative content tasks makes it possible to form integrated images of mathematical material, the scope and complexity of which is projected at the stage of planning the educational process; and this clearly makes it possible to optimize the planning of the implementation of continuity in teaching mathematics, considering both differentiation and individualization of the educational process.

Secondly, the use of tasks of an integrative content allows almost unlimited consolidation of mathematical objects, thus ensuring high quality design of the implementation of the mathematics education sequence both in the comprehensive school and at

для формування реальних математичних здатностей слід застосовувати обидва шляхи.

Другий момент. Коли говоримо про математичні здатності учнів чи студентів, то, очевидно, розуміємо під цим уміння створювати, досліджувати та розв'язувати математичні моделі. Отже, важливу роль при цьому відіграють саме задачі інтегративного змісту, застосування яких припадає на етапи узагальнення та систематизації математичних умінь. Саме застосування таких задач, дослідження їх розв'язань, розвиток їх у серії та застосування їх розв'язань до інших задач дозволяє говорити про можливість перетворення математичних умінь в математичні здатності та переконання. Саме на таких задачах базується реалізація інтегративного підходу до навчання математики в школі та у закладах вищої освіти. А так як інтеграція методів, засобів, компонентів та змістовних ліній самої математики як навчального предмету забезпечує реалізацію принципу наступності у вивченні цього предмету між різними ланками освіти, то можемо стверджувати про наявність прямого зв'язку між цим принципом та використанням у навчанні задач інтегративного змісту.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальших розвідок. Дослідження ролі задач інтегративного змісту в реалізації принципу наступності навчання математики дало можливість висновити наступне.

По-перше, використання задач інтегративного змісту дає можливість сформувати інтегровані образи математичного матеріалу, обсяг і складність яких проектується на етапі планування навчального процесу; а це однозначно уможливлює оптимізацію планування реалізації наступності у навчанні математики з врахування як диференціації, так і індивідуалізації навчального процесу.

По-друге, використання задач інтегративного змісту дозволяє практично необмежено укрупнювати математичні об'єкти, забезпечуючи цим самим якісне проектування реалізації наступності навчання математики як в transitional stages: school – specialized school, comprehensive school – graduate school.

Thirdly, the use of integrative content tasks involves the use of scientific methods of cognition by students – observation, analogy, analysis, synthesis, comparison, and collation. In its turn, this practice ensures the formation of generalized mathematical skills and, as a result, the formation of integrative mathematical abilities and beliefs based on them, which will enable the implementation of the continuity principle in the study of mathematics between different branches of education.

розрізі загальноосвітньої школи, так і на перехідних етапах: школа – профільна школа, загальноосвітня школа – вища школа.

По-третє, використання задач інтегративного змісту передбачає застосування суб'єктами навчання наукових методів пізнання – спостереження, аналогії, аналізу, синтезу, порівняння та співставлення. В свою чергу така практика забезпечує формування узагальнених математичних умінь і, як наслідок, формування на їх базі інтегративних математичних здатностей та переконань, які й уможливлюватимуть реалізацію принципу наступності у вивченні математики між різними ланками освіти.

REFERENCES (TRANSLATED & TRANSLITERATED)

1. Birgin, O., & Uzun Yazıcı, K. (2021). The effect of GeoGebra software – supported mathematics instruction on eighth-grade students' conceptual understanding and retention. *Journal of Computer Assisted Learning*, 37(4), 925-939. Retrieved from: https://doi.org/10.1111/jcal.12532 [in English].
2. Botuzova, Y.V. (2020). Factors of Providing the Continuity of Teaching Mathematics During Transition from High School to University. *Universal Journal of Educational Research,* 8(3), 857-865. Retrieved from: https://doi.org/10.13189/ujer.2020.080316 [in English].
3. Gogovska, V., & Malcheski, R. (2012). Improvement of Intra-disciplinary Integration of Mathematics Instruction. *Procedia-Social and Behavioral Sciences*, 46, 5420-5424. Retrieved from: https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.06.450 [in English].
4. Cotič, N., Cotič, M., Felda, D., & Krmac, N. (2021). The effect of cross-curricular integration on pupils' knowledge gained through experiential learning. *Cypriot Journal of Educational Science,* 16(6), 3133-3146. Retrieved from: https://doi.org/10.18844/cjes.v16i6.6512 [in English].
5. Pinkernell, G., Diego-Mantecón, J.M., Lavicza, Z., & Sangwin, C. (2023). AuthOMath: Combining the Strengths of STACK and GeoGebra for School and Academic Mathematics, *JET*, vol. 18, № 03, 201-204. Retrieved from: https://doi.org/10.3991/ijet.v18i03.36535 [in English].
6. Kramarski, B., & Hirsch, C. (2003). Using computer algebra systems in mathematical classrooms. *Journal of Computer Assisted Learning*, 19, 35-45. Retrieved from: https://doi.org/10.1046/j.0266-4909.2003.00004.x [in English].
7. Pope, D. (2023). Using Desmos and GeoGebra to Engage Students and Develop Conceptual Understanding of Mathematics. *Technology Integration and Transformation in STEM Classrooms.* Hershey, PA: IGI Global, 104-129. Retrieved from: https://doi.org/10.4018/978-1-6684-5920-1.ch006 [in English].
8. Rizhniak, R., Pasichnyk, N., Zavitrenko, D., Akbash, K., & Zavitrenko, A. (2021). The Implementation of an Integrative Approach to Learning with Use of Integrated Images. *Revista Romaneasca Pentru Educatie Multidimensionala,* 13(1), 281-297. Retrieved from: https://doi.org/10.18662/rrem/13.1/373 [in English].
9. Treacy, P., & O'Donoghue, J. (2013). Authentic Integration: a model for integrating mathematics and science in the classroom. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 703-718. Retrieved from: https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.868543 [in English].

10. Botuzova, Y.V., Nichyshyna, V.V., & Rizhniak, R.Y. (2022). Nastupnist metodiv navchannia rozviazuvannia matematychnykh zadach u shkoli ta zakladi vyshchoi osvity: kontekst intehratyvnoho pidkhodu [Continuity of teaching methods for solving mathematical problems in schools and university: the context of the integrative approach]. *Fizyko-matematychna osvita – Physical and Mathematical Education*, 36(4), 16-25. Retrieved from: https://doi.org/10.31110/2413-1571-2022-036-4-002 [in Ukrainian].

11. Honcharenko, S.U. (1997). *Ukrayins'kyy pedahohichnyy slovnyk [Ukrainian pedagogical dictionary]*. Kyiv: Lybid [in Ukrainian].

12. Gordiychuk, G.B. 2006. Pedahohichni umovy zabezpechennya neperervnosti vyvchennya pryrodnycho-matematychnykh dystsyplin u zahal′noosvitnikh shkolakh i profesiyno-tekhnichnykh uchylyshchakh [Pedagogical conditions for ensuring the continuity of the study of natural and mathematical disciplines in secondary schools and vocational and technical schools]. *Candidate`s thesis.* Vinnitsa: VDPU named after M. Kotsyubynskyi [in Ukrainian].

13. Didovik, M.V. (2007). Neperervnist′ fizyko-matematychnoyi pidhotovky v litseyakh ta vyshchykh navchal′nykh zakladah III-II rivniv akredytatsiyi [Continuity of physical and mathematical training in lyceums and higher educational institutions of III-II levels of accreditation]. *Candidate`s thesis.* Vinnitsa: VDPU named after M. Kotsyubynskyi [in Ukrainian].

14. Kushnir, V.A., & Rizhnyak, R.Ya. (2011). Intehratyvnyy obraz yak forma realizatsiyi intehratyvnoho pidkhodu v osviti [Integrative image as a form of implementing an integrative approach in education]. *Zbirnyk prats'. Seriya: Pedahohichni nauky – Proceedings. Series: Pedagogical sciences.* Kirovohrad: RVV KDPU named after V. Vinnichenko, issue 99 [in Ukrainian].

15. *Nastupnist' u navchanni matematyky v konteksti reformuvannya zahal'noyi seredn'oyi osvity: realiyi ta perspektyvy [Continuity in the teaching of mathematics in the context of the reform of general secondary education: realities and prospects].* (2019). Odesa, 201-203 [in Ukrainian].

16. *Natsional'na doktryna rozvytku osvity [National doctrine of educational development].* President of Ukraine. Decree No. 347/2002 of April 17, 2002. Retrieved from: https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/347/2002#Text [in Ukrainian].

Received: February 22 2024
Accepted: March 07, 2024